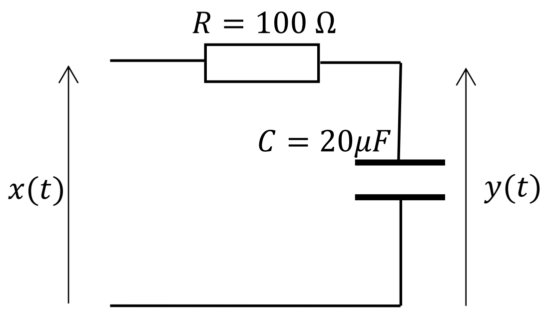
TD BTS SN **_RESOLUTION NUMERIQUE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE_**

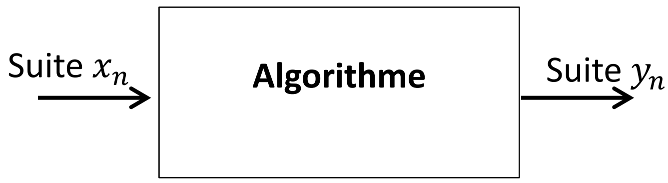
Exercice 1 : *Filtre Passe bas de type RC*

Une tension $x(t)$ est appliquée en entrée d'un filtre analogique. En écrivant les lois électriques, on peut démontrer que la tension de sortie $y(t)$ est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\mathbf{0.002\, y'(t) + y(t) = x(t)}$$



On désire réaliser un équivalent numérique de ce filtre. Le signal $x(t)$ est échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1\,000 Hz$ pour constituer une suite x_n. En sortie de filtre, on retrouve une suite y_n.



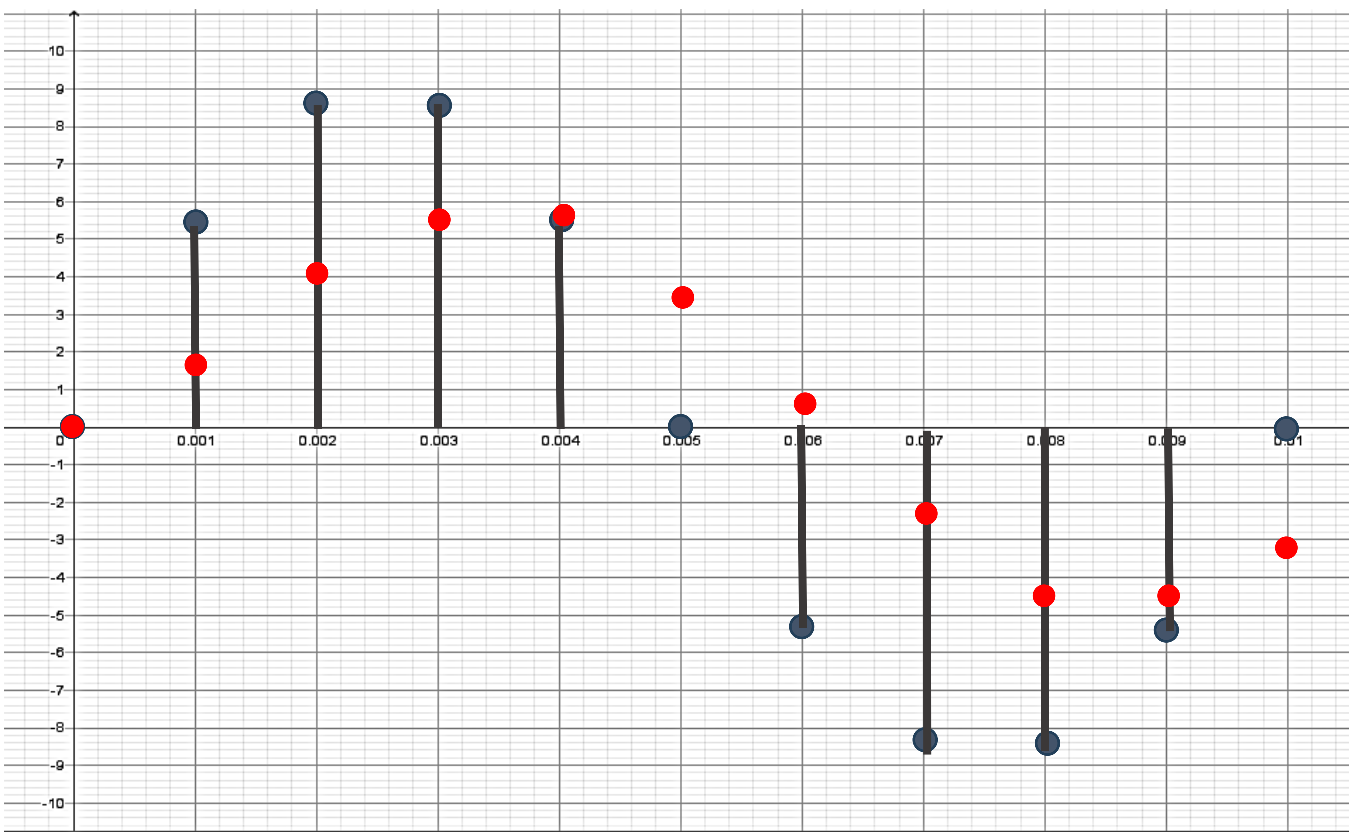
On suppose que la tension d'entrée est sinusoïdale de fréquence 100 Hz : $x(t) = 9\sin(2\pi \times 100t)$

1- Calculer la période d'échantillonnage T_e et compléter les lignes t et x_n du tableau ci-dessous :

$$T_e = \frac{1}{f_e} = \frac{1}{1000} = 0{,}001\ s$$

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t = nT_e$		0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010
x_n	0	9 sin (0) 0	9 sin (0,628) 5,3	9 sin (1,257) 8,6	9 sin (1,885) 8,6	9 sin (2.513) 5,3	9 sin (3,142) 0	9 sin (3,770) -5,3	9 sin (4,398) -8,6	9 sin (5,027) -8,6	9 sin (5,655) -5,3	9 sin (6,283) 0
y_n	0											

2- Tracer la courbe représentative du signal d'entrée $x(t)$



3- Déterminer l'équation de récurrence permettant de calculer y_n en fonction de y_{n-1} et x_n

L'E.D. est : $0.002\, y'(t) + \mathrm{y(t)} = x(t)$

En travaillant sur les signaux échantillonnés :

$$0.002\, \frac{(y_n - y_{n-1})}{0{,}001} + y_n = x_n$$

Ce qui donne :

$$\frac{0.002}{0{,}001}(y_n - y_{n-1}) + y_n = x_n$$

$$2\,(y_n - y_{n-1}) + y_n = x_n$$

$$2\,y_n - 2\,y_{n-1} + y_n = x_n$$

$$3\,y_n - 2\,y_{n-1} = x_n$$

$$3\,y_n = x_n + 2\,y_{n-1}$$

Et finalement :

$$\boldsymbol{y_n = \frac{x_n + 2\,y_{n-1}}{3}}$$

4- Détailler le calcul de y_0 , y_1 et y_2 en arrondissant toujours les valeurs au dixième.

Pour $n = 0$: $y_0 = \frac{x_0 + 2\,y_{-1}}{3} = \frac{\mathbf{0} + 2 \times \mathbf{0}}{3} = 0$

Pour $n = 1$: $y_1 = \frac{x_1 + 2\,y_0}{3} = \frac{\mathbf{5{,}3} + 2 \times \mathbf{0}}{3} \approx 1{,}8$

Pour $n = 2$: $y_2 = \frac{x_2 + 2\,y_1}{3} = \frac{\mathbf{8{,}3} + 2 \times \mathbf{1{,}8}}{3} = 4{,}0$

5- Calculer les autres termes de la suite y_n et compléter la ligne y_n du tableau précédent

$\boldsymbol{n}$	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
$\boldsymbol{t = n\,T_e}$		0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010
$\boldsymbol{x_n}$	0	9 sin (0) 0	9 sin (0,628) 5,3	9 sin (1,257) 8,6	9 sin (1,885) 8,6	9 sin (2.513) 5,3	9 sin (3,142) 0	9 sin (3,770) -5,3	9 sin (4,398) -8,6	9 sin (5,027) -8,6	9 sin (5,655) -5,3	9 sin (6,283) 0
$\boldsymbol{y_n}$	0	0,0	1,8	4,0	5,5	5,5	3,6	0,7	-2,4	-4,5	-4,7	-3,2

6- Tracer la courbe représentative du signal de sortie sur le graphe précédent

Courbe rouge sur le graphique précédent

Exercice 2 : Une casserole d'eau initialement à une température de 100°C est placée dans une pièce dont la température est constante et égale à 19°C. On définit la fonction y définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $y(t) =$ température de l'eau en °C, au temps $t > 0$ exprimé en minutes. Les principes de la physique permettent d'établir que la fonction y est solution de l'équation différentielle : $10\,y' + y = 19$ avec comme condition initiale : $y(0) = 100$.

On résout cette ED numériquement en prenant une période d'échantillonnage $T_e = 1$ mn.

1- Donner la relation de récurrence qui permet de calculer y_n en fonction de y_{n-1}

L'E.D. est : $10\,y'(t) + \mathrm{y(t)} = 19$

En travaillant sur les signaux échantillonnés :

$$10\,\frac{(y_n - y_{n-1})}{1} + y_n = 19$$

Ce qui donne :

$$10\,(y_n - y_{n-1}) + y_n = 19$$

$$10\,y_n - 10\,y_{n-1} + y_n = 19$$

$$11\,y_n - 10\,y_{n-1} = 19$$

$$11\,y_n = 19 + 10\,y_{n-1}$$

Et finalement :

$$\boldsymbol{y_n = \frac{19 + 10\,y_{n-1}}{11}}$$

2- Détailler le calcul de y_1 et y_2 en arrondissant toujours les valeurs au dixième.

Pour $n = 0$: $y_0 = 100$

Pour $n = 1$: $y_1 = \frac{19+10\,y_0}{11} = \frac{19+10\times 100}{11} \approx 92{,}6$

Pour $n = 2$: $y_2 = \frac{19+10\,y_1}{11} = \frac{19+10\times 86{,}5}{11} \approx 85{,}9$

3- Calculer les autres termes de la suite y_n pour compléter la ligne y_n du tableau suivant :

$\boldsymbol{n}$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{t = n\,T_e}$ en mn		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{y_n}$	0	100	92,6	85,9	79,9	74,3	69,3	64,7	60,6	56,8	53,4	50,2

4- Quelle est la formule de la cellule C4 qui permet le calcul de y_1

	A	B	C
1	*n*	*t*	*yn*
2	-1		
3	0	0	100
4	1	1	
5	2	2	
6	3	3	
7	4	4	
8	5	5	
9	6	6	
10	7	7	
11	8	8	
12	9	9	
13	10	10	

La formule à saisir dans la cellule C4 est :

$\boxed{\texttt{=(19+10*C3)/11}}$